Практика 10. Теорема Куратовского-Понтрягина (формулировка) – зачем она нужна?

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Теорема Куратовского-Понтрягина (формулировка) – зачем она нужна?

Теорема Куратовского-Понтрягина – это теорема в теории графов, дающая необходимое и достаточное условие планарности графа.

Определение.

Планарный граф – граф, который можно изобразить на плоскости без пересечений ребер не по вершинам. Какое-либо конкретное изображение планарного графа на плоскости называется **плоским графом**.

Теорема.

Граф планарен тогда и только тогда, когда не содержит подграфов гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$

Определение.

Планарный граф – граф, который можно изобразить на плоскости без пересечений ребер не по вершинам. Какое-либо конкретное изображение планарного графа на плоскости называется **плоским графом**.

Теорема Куратовского-Понтрягина (формулировка) – зачем она нужна?

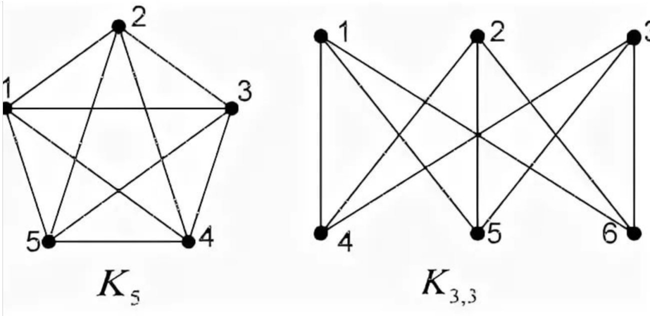
Определение.

Графы G_1 и G_2 – гомеоморфны, если применяя к каждому из них операцию разбиения ребер, можно привести их к двум изоморфным графам.

Определение.

В теории графов изоморфизмом графов $G = \langle V_G, E_G \rangle$ и $H = \langle V_H, E_H \rangle$ называется биекция между множествами вершин графов $f\colon V_G \to V_H$ такая, что любые две вершины u и v графа G смежны тогда и только тогда, когда вершины $f(u)$ и $f(v)$ смежны в графе H.
Здесь графы понимаются неориентированными и не имеющими весов вершин и ребер. В случае, если понятие изоморфизма применяется к ориентированным или взвешенным графам, накладываются дополнительные ограничения на сохранение ориентации дуг и значений весов. Если изоморфизм графов установлен, они называются изоморфными и обозначаются как $G \simeq H$.

Теорема Куратовского-Понтрягина (формулировка) – зачем она нужна?



Доказательство.

1. Проверим планарность графа K_5: $p = 5$, q – число рёбер.
Условие планарности: $q \leq 3p - 6$, т.е. $q_{\text{план}} = 9$, но в K_5 $q = 10$;
Аналогично для $K_{3,3}$: $q_{\text{план}} = 12$, а по факту для $K_{3,3}$ $q = 16$.
2. Так как графы K_5 и $K_{3,3}$ непланарны, то это значит, что содержащие их в качестве подграфов графы также непланарны, ч.т.д.

Для проверки планарности графа с p вершинами по этому критерию необходимо рассмотреть C_p^5 графов с пятью вершинами и C_p^6 графов с шестью вершинами.